

[2017 6<sup>th</sup> OKUCC]

**새로운 무격자 기법의 소개 및 응용**  
(Introduction to a new concept of meshless method)

서울대학교 극초음속 연구실  
김 규 홍

2017. 09. 21

**1.** 무격자 기법 개요

**2.** 무격자 해석 기술

**3.** 무격자 해석 결과

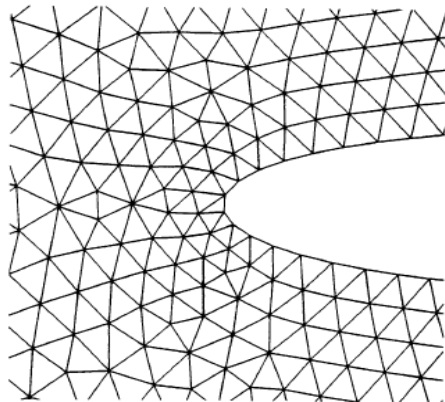


## 1. 무격자 기법 개요

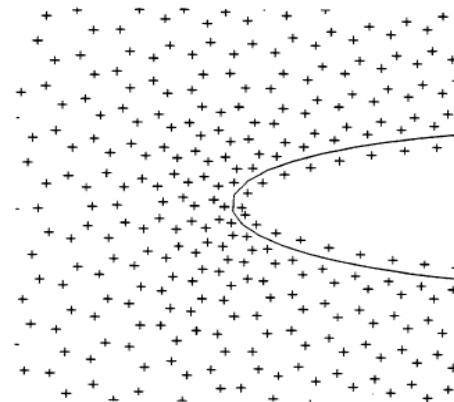


## ◆ CFD 발전 방향

- 2000년대 초반까지 FVM 격자계가 무격자에 비해 conservation을 만족시킨다는 장점으로 주로 사용됨
- FVM 격자계 중 Unstructured 격자계가 복잡한 형상에 유연하게 대처할 수 있다는 장점으로 각광받음
- 산업계 CFD 응용 영역이 확장됨에 따라 **소음이나 와류에서 높은 정확도(High-order accuracy)**가 요구되나 Unstructured 격자계로는 구현이 어려움
  - ◆ 현재 DG 방법이 연구가 되고 있으나 불연속면에서 불안정성이 해결되지 않음
- **복잡한 형상 또는 이동하는 물체 등 편의성 증진**의 요구를 충족시키지 못함
  - ◆ 현재 학계에서 이에 대한 연구 미흡



FVM 격자계(볼륨 필요)


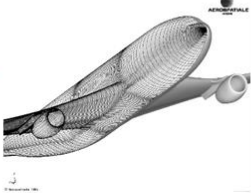
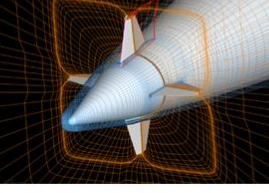
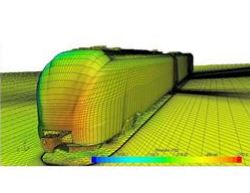

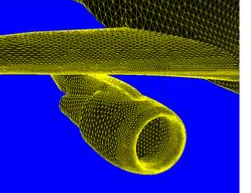
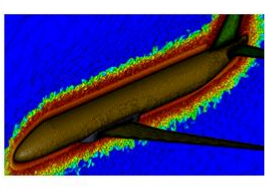
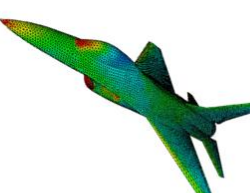


무격자계(볼륨 불필요)



## ◆ CFD 해석 과정

- 정렬 격자계의 경우 3차원에서 표면 격자는 물론 볼륨 격자를 만드는데 엄청난 노동력과 시간을 요구
- 비정렬 격자계 역시 프리즘이나 볼륨 격자를 생성할 때 Skewness 발생 등 여러 제약 조건에 의해 격자 생성에 많은 시간과 노동력 소모

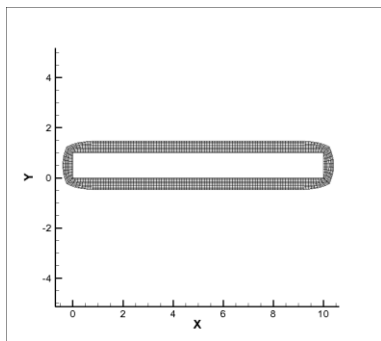
	CAD	표면 격자	볼륨 격자	유동해석
STRUCTURED GRID				
		시간, 노동력 大	시간, 노동력 大	
UNSTRUCTURED GRID				
		시간, 노동력 中	볼륨: 시간, 노동력 中 프리즘: 시간, 노동력 大	

소요시간을  
최소화  
하는  
방법이  
필요

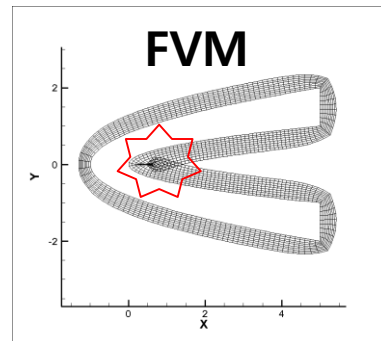


## ◆ 무격자 질점계의 특징

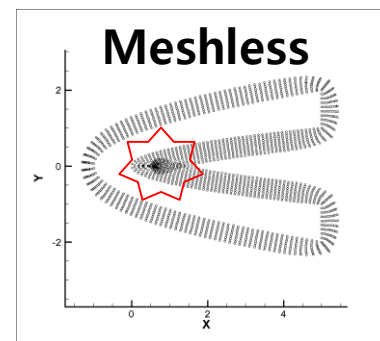
- 기존의 FVM 기법은 물체가 과도하게 **변형**되거나 **이동**하는 경우, 격자의 **재생성**이 **필수적**이지만 무격자의 경우 재생성 없이 점만을 이용하기 때문에 **domain을 re-meshing하지 않고 해석 가능.**
- 이러한 강점이 전개 전의 에어백과 같은 물체가 붙어있는 상태(**extremely attached**)에서 팽창하여 Computational domain 을 해석 중간에 생성 해야 하는 경우 격자 기반의 기법보다 **수월**하게 수행 가능



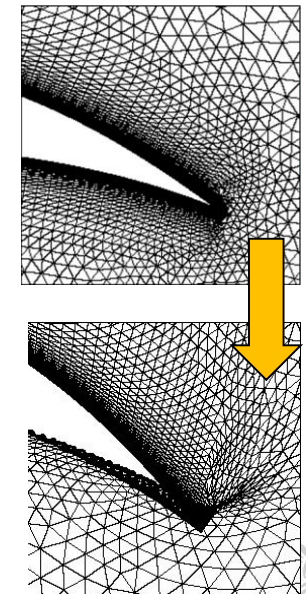
변형 전



변형 후  
(격자 재생성 필요)



변형 후  
(해석 가능)



Movement

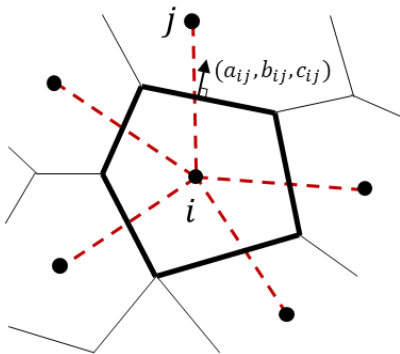


## ◆ 기존 무격자 해석기술의 단점

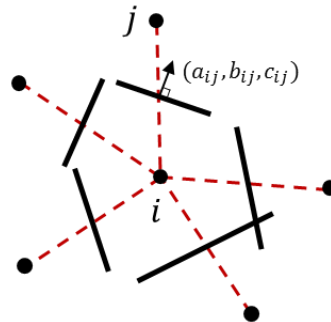
- 일반적으로 무격자 해석기술은 **Conservation**을 만족하지 않는 단점을 가짐
  - ◆ 연속구간에서 과도한 질량유량 에러가 발생
  - ◆ 충격파의 위치나 충격파 후류의 물성치를 다르게 예측
- 기존의 무격자 해석기술은 주로 비압축성 또는 아음속 유동 해석을 위해 개발. **초음속/극초음속 영역에서는 기존의 무격자 해석기법이 그대로 적용 불가**
- 따라서 강한 충격파를 포함하는 유동해석에 무격자 해석기술을 적용하기 위해서는 무격자 기법의 non-conservative feature를 분석하고, 이를 보완할 수 있는 연구가 필요



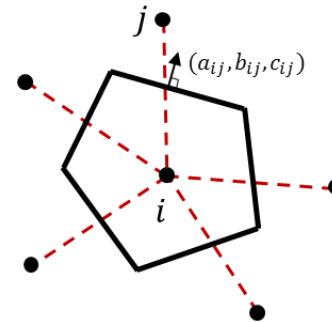
**GC-LSM 개발을 통해 conservation 문제의 상당 부분 해결**



FVM



Original LSM



Geometric Conservation Law를 만족하는 조건

$$\oiint_S \vec{n} dA = 0 \Leftrightarrow \sum_j a_{ij} = 0$$



## ◆ GC-LSM 개요

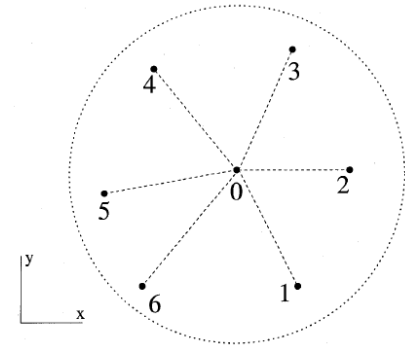
### ■ Least Square Method를 기반의 무격자 해석 기법

- ◆ 본 연구에서는 사용자 요구에 따라 Connectivity를 최소화 하기 위하여 Least Square Method를 사용

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_0 \approx \sum_j a_{0j}(\varphi_j - \varphi_0) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_0 \approx \sum_j b_{0j}(\varphi_j - \varphi_0)$$

$$a_{0j} = \frac{\omega_{0j} \Delta x_{0j} \sum \omega \Delta y^2 - \omega_{0j} \Delta y_{0j} \sum \omega \Delta x \Delta y}{\sum \omega \Delta x^2 \sum \omega \Delta y^2 - (\sum \omega \Delta x \Delta y)^2}$$

$$b_{0j} = \frac{\omega_{0j} \Delta y_{0j} \sum \omega \Delta x^2 - \omega_{0j} \Delta x_{0j} \sum \omega \Delta x \Delta y}{\sum \omega \Delta x^2 \sum \omega \Delta y^2 - (\sum \omega \Delta x \Delta y)^2}$$



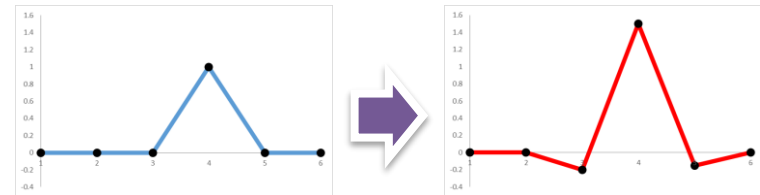
Local point cloud

### ■ Least Square Method 기법의 비보존성

- ◆ 기존의 LSM은 비보존 특성 때문에 압축성 유동에서 충격파 위치와 강도 예측 불가
- ◆ 일반적으로  $\sum_j a_{0j} \neq 0$  이므로 local extrema 부근에서 물리량이 증폭되는 문제가 있어서 강건성 손실

Ex)  $\varphi_j = \begin{cases} 1, & \text{if } j = 0 \\ 0, & \text{if } j \neq 0 \end{cases}$  일 때,

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_0 = \sum_j a_{0j}(\varphi_j - \varphi_0) = -\sum_j a_{0j} \neq 0$$



비보존성에 의한 수치진동 발생





## ◆ GC-LSM 계산

- $\varphi(x, y) = \varphi_0 + \Delta x \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial \varphi(y_0)}{\partial y} + O(\Delta^2)$
- $minimize \sum_{j=1}^n \omega_{0j} \left[ \Delta \varphi_{0j} - \Delta x_{0j} \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial x} - \Delta y_{0j} \frac{\partial \varphi(y_0)}{\partial y} \right]^2$

위 식에 Geometric Conservation과 1<sup>st</sup> order consistency 조건을 추가로 만족시키기 위하여 **Lagrange Multiplier** 사용

- $F_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} [\Delta \varphi_{ij} - \Delta x_{ij} a_{ij} - \Delta y_{ij} b_{ij}]^2$ 
<- Objective function (Least Square Method)
- $G_i = \sum_j a_{ij} = 0, H_i = \sum_j b_{ij} = 0$ 
<- Constraint(1) & (2) (Geometric Conservation)
- $M_i = \sum_j a_{ij} x_j = 1, N_i = \sum_j a_{ij} y_j = 0,$ 
<- Constraint(3) & (4) (1<sup>st</sup> order consistency)
- $P_i = \sum_j b_{ij} x_j = 0, Q_i = \sum_j b_{ij} y_j = 1,$ 
<- Constraint(5) & (6) (1<sup>st</sup> order consistency)
- $\Lambda_i \equiv F_i + \lambda G_i + \mu H_i + \alpha M_i + \beta N_i + \gamma P_i + \delta Q_i$ 
<- Lagrange function

$\therefore \nabla \Lambda_i(a_{ij}, b_{ij}, \lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$

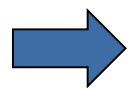
- 위 연립방정식을  $AX = B$  형태로 변환한 후 행렬방정식 해법을 통해 GCL과 1<sup>st</sup> order consistency 조건을 만족하는 무격자 계수를 계산



# 무격자 기법 개요

## ◆ Structured FVM, Unstructured FVM, Meshless Method(GC-LSM) 간의 성능 비교

		Structured FVM	Unstructured FVM	Meshless (GC-LSM)
격자 생성 및 변형	격자 moving 효율성	X	△	○
	사용자 편의성	X	△	◎
유동 해석	보존성	○	○	△→○
	강건성	○	○	△→○
	경계층 포착능력	○	△→○ (Prism layer 이용 시)	○
	정확성	○ Semi high order ( 3차, 5차, ... ) Directional splitting	△ (2차 정확도)	○ (3차 정확도)



GC-LSM 기법을 개발함으로써 무격자 기법의 **사용 편의성의 장점을** 이용하면서 무격자 기법의 단점이었던 **보존성 및 강건성을 보강**

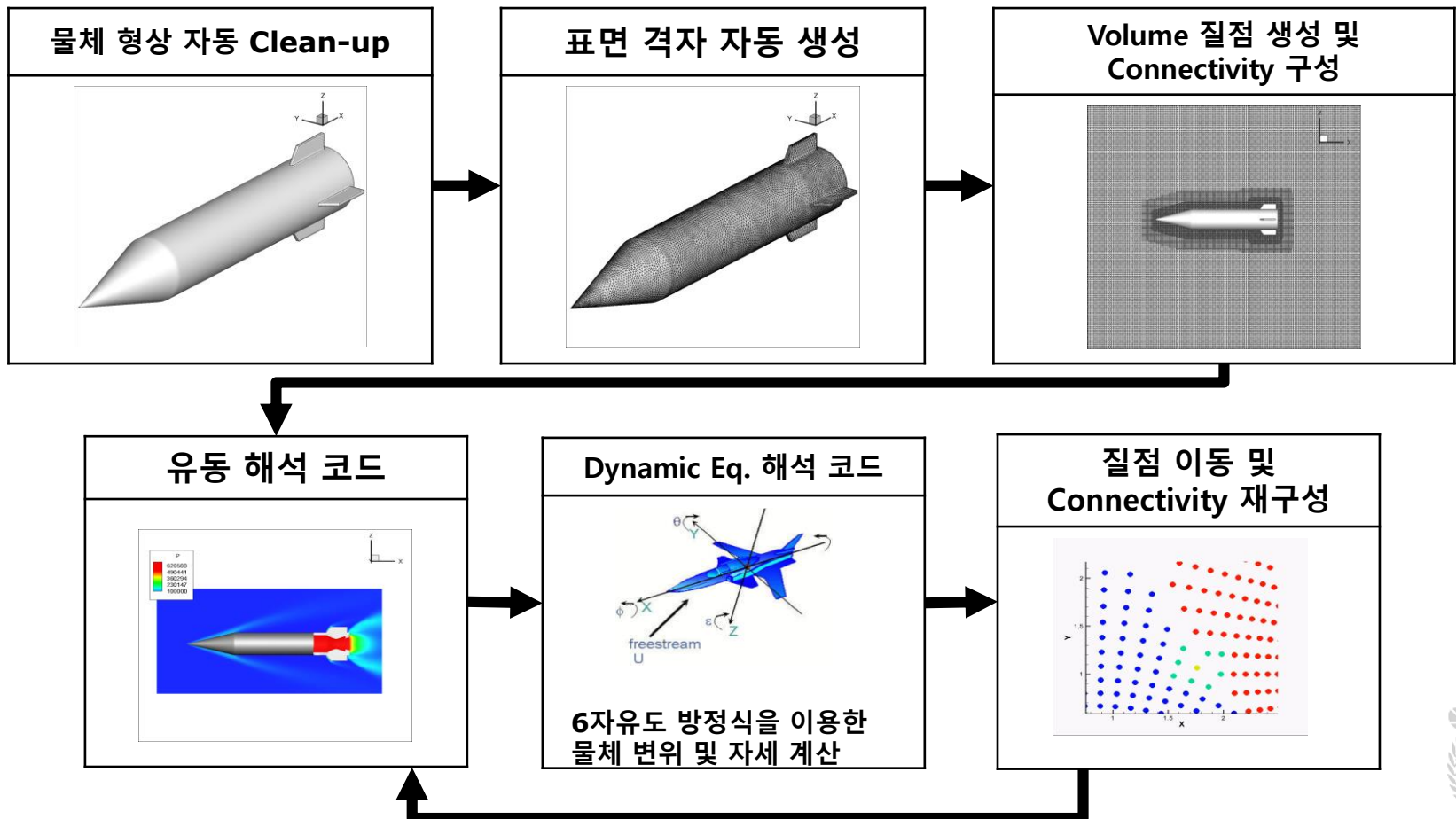


## 2. 무격자 해석 기술

- 무격자 프로그램 구성
  - 물체 형상 자동 clean-up
  - 물체 표면 격자 자동 생성
  - 질점 생성 및 Connectivity 구성
  - 유동 해석 기법
  - 6-DOF Simulation



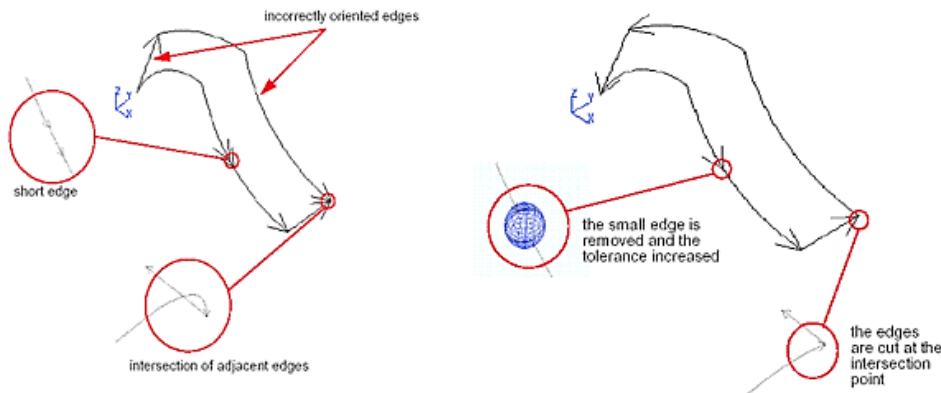
## 3차원 무빙 유동 해석 코드 개발



## ◆ 물체 형상 자동 Clean-up

- 표면 격자에서 요소 연결 불연속 등의 문제가 있을 경우 **형상 clean-up 필요**
- Shape fix, sewing 등의 방법을 이용하여 **자동으로** 물체 형상 clean-up

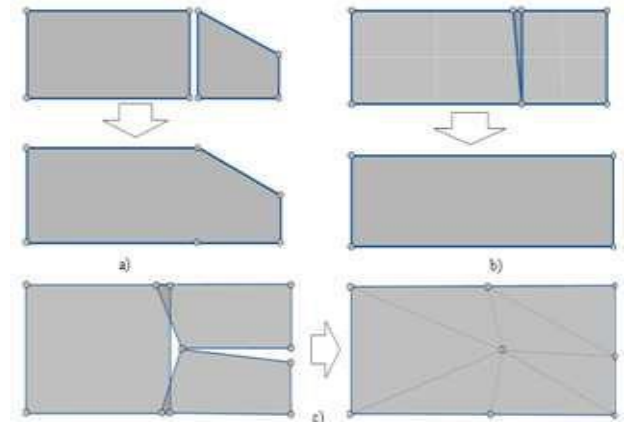
### <Shape fix>



Initial shape

Fixed shape

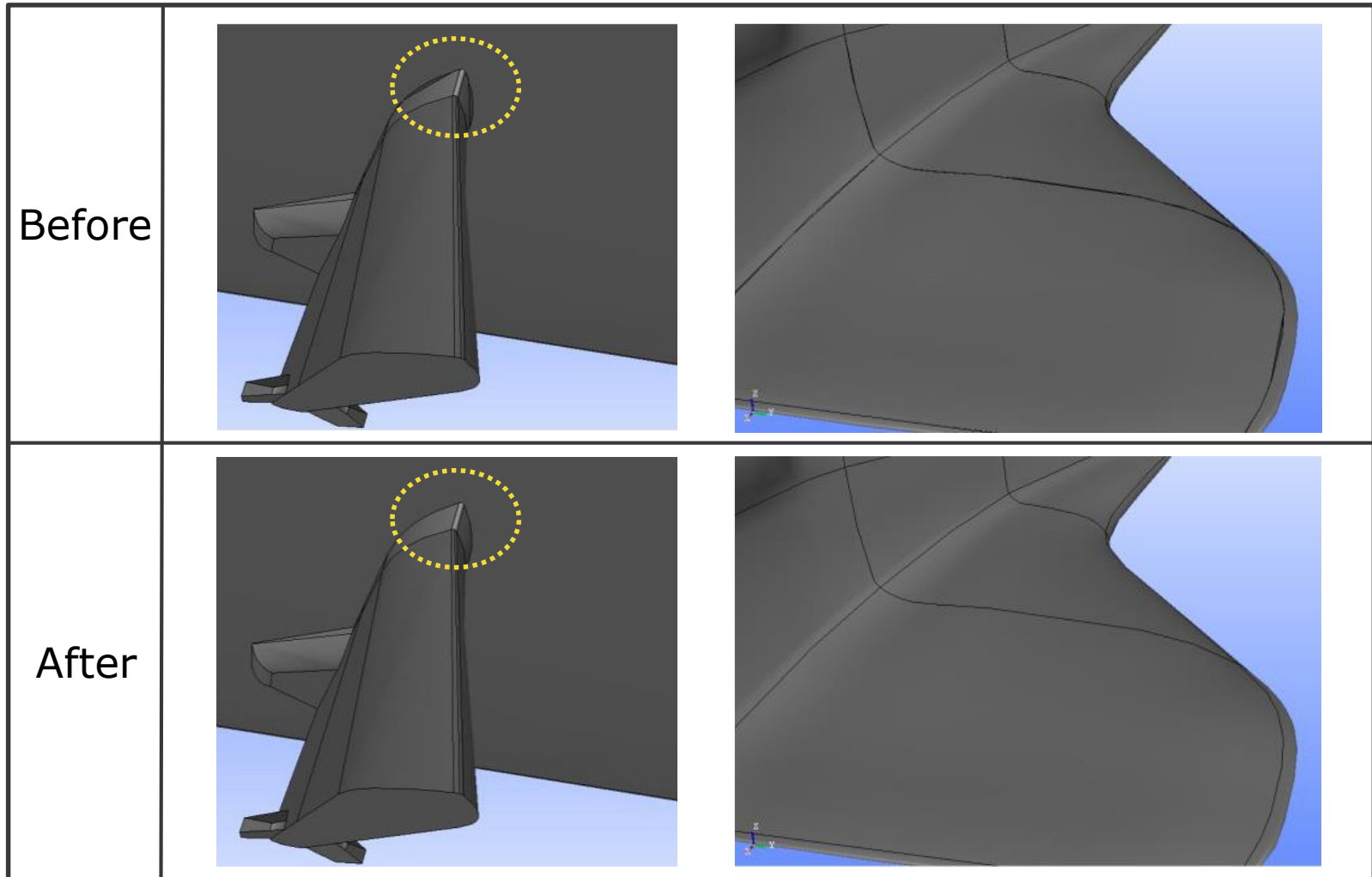
### <Sewing>



- a) constant gap size
- b) varying overlap
- c) overlaps and gaps

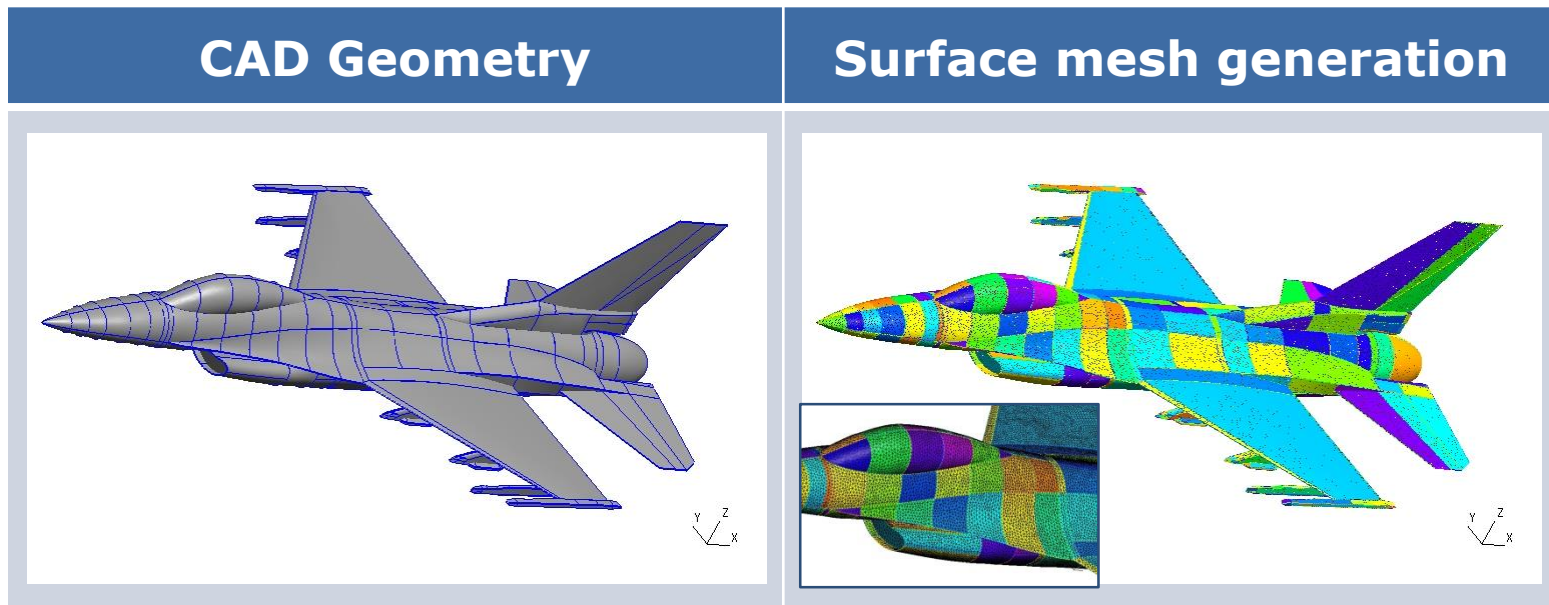


## ◆ 물체 형상 자동 Clean-up

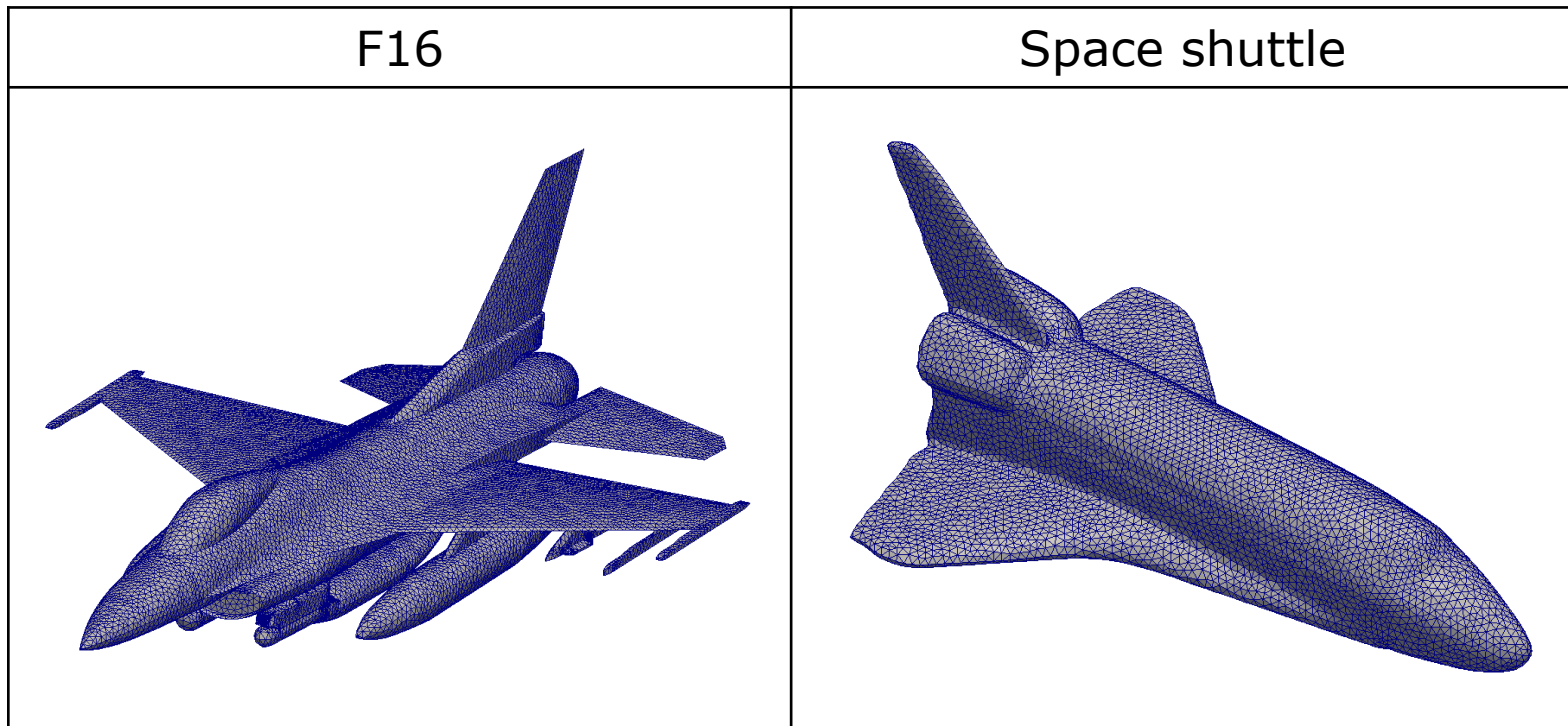


## ◆ 표면 격자 자동 생성

- 물체 CAD 파일 : STEP, IGES Format
- 격자 생성 파라미터 : element 최소/최대 크기, 곡률 고려 여부 등
- 출력 : NASTRAN format
- GMSH, Netgen 등 open source 격자 생성기 기반 개발



## ◆ 표면 격자 생성(STEP, IGES 파일)





## ◆ 무격자 질점계 장점

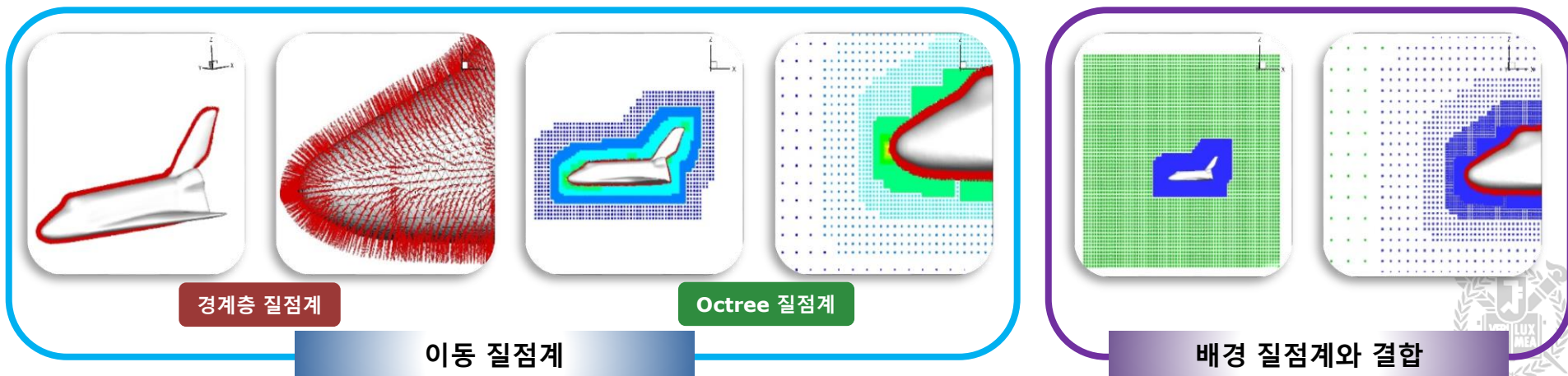
- 무격자 기반 solver는 점 분포만 있으면 유동 해석이 가능하기 때문에, Cartesian/Unstructured/Structured의 장점을 적용 가능

## ◆ 무격자 질점계 구성 기준

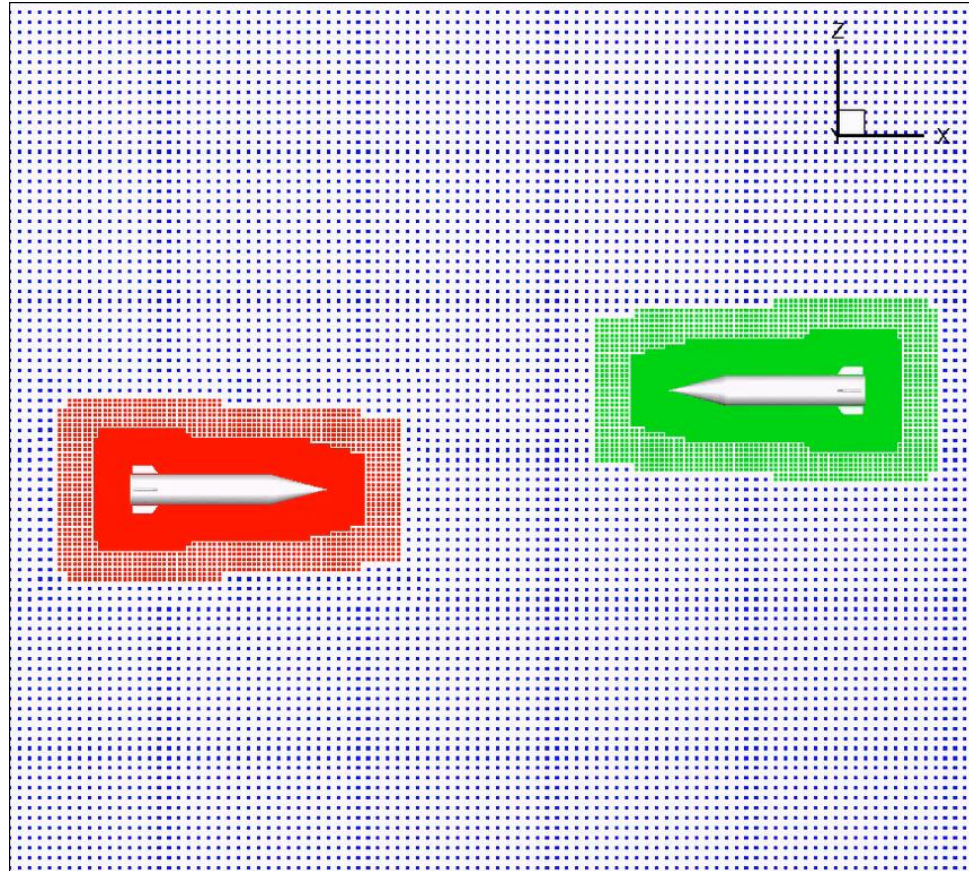
- Moving 문제에서 무격자 질점계 재생성시 Searching을 피하거나 최소화할 수 있도록 구성
- 난류 경계층을 효율적으로 모사하기 위해 물체 표면을 따른 질점 생성

## ◆ 질점계 생성 원리

- 전체 질점계는 다음 sub 질점계들의 조합으로 구성
  - ◆ 배경 질점계 : 위치가 고정된 질점계
  - ◆ 이동 질점계 : 이동 물체를 따라 움직이는 질점계
- 규칙적으로 질점이 존재하는 Cartesian 형태의 배경 질점계 사용
  - ◆ 질점계 재생성시 Searching이 필요 없음
- 이동 질점계는 경계층 질점계와 Octree 질점계로 구성



# 질점계 생성 예시



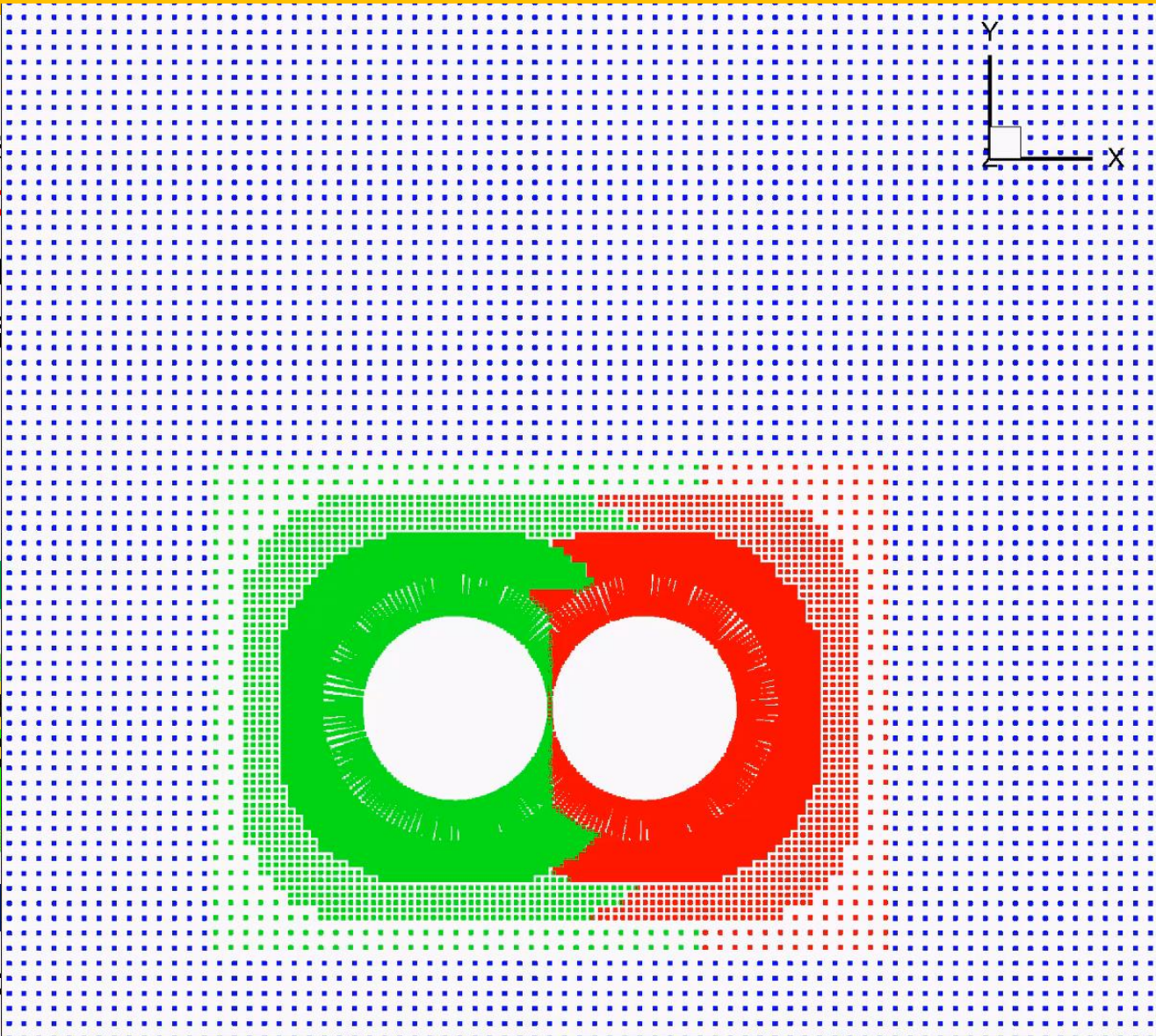
이동 질점계의 이동



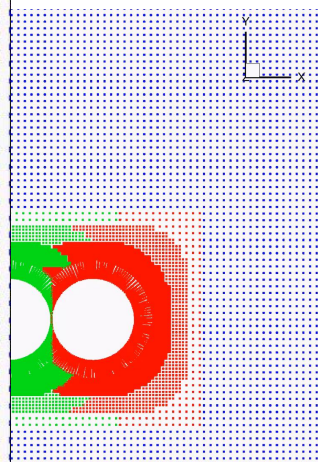


# 질점 이동 방법

- ◆ 물체
- 물체
- 정지
- 이동
- 으로
- 1. 이
- 2. 이
- 으로



점계는  
 저장함  
 상대적



이동

차원 구  
 질점 이동

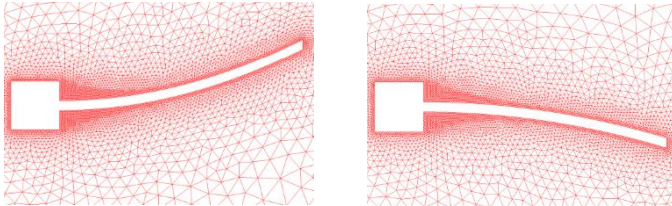


## ◆ Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) Method

### ■ C. W. Hirt에 의해 제안

- ◆ Lagrangian description: 유동속도와 같은 속도로 움직이는 Frame에서 유동을 관찰
- ◆ Eulerian description: 고정된 Frame에서 유동을 관찰
- ◆ **ALE description**: 유동속도와 다른 임의의 속도로 움직이는 Frame에서 유동을 관찰, Kinematic description에 적절

### ■ Moving boundary를 포함하는 유동해석에 사용



$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho(u - \hat{u}) \\ \rho u(u - \hat{u}) + p \\ \rho v(u - \hat{u}) \\ E(u - \hat{u}) + pu \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \rho(v - \hat{v}) \\ \rho u(v - \hat{v}) \\ \rho v(v - \hat{v}) + p \\ E(v - \hat{v}) + pv \end{bmatrix}$$

$\hat{u}, \hat{v} = \text{velocity component of points}$

Deformed mesh example

Euler equation in ALE description

[1] HIRT, C. W.; AMSDEN, Anthony A.; COOK, J. L. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds. *Journal of Computational Physics*, 1974, 14.3: 227-253.

[2] DONEA, Jean, et al. Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods, volume 1, chapter 14. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, John Wiley & Sons, 2004.

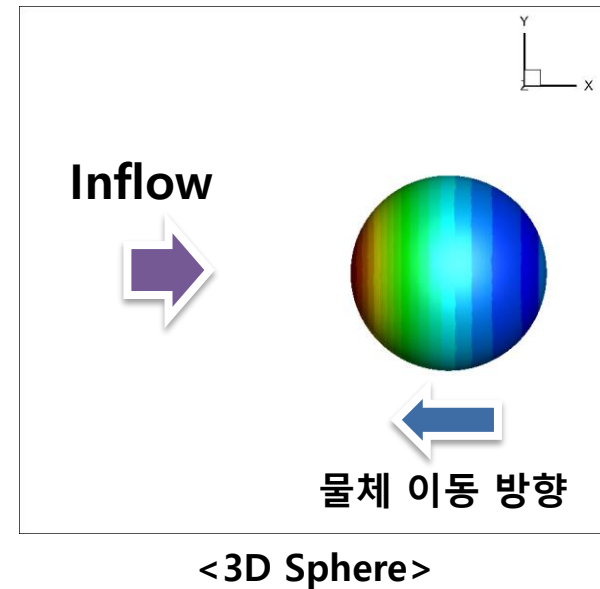
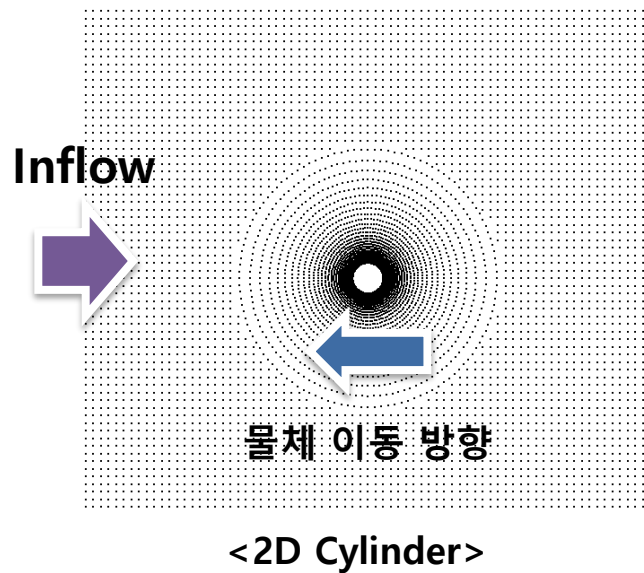


## ◆ 검증 문제 해석 개요

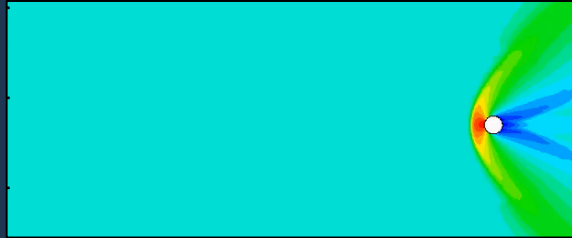
### ■ Moving Cylinder(2D)/ Moving Sphere(3D)

- ◆ 물체에서 바라본 자유류 속도는  
4case 모두 Mach 2로 동일

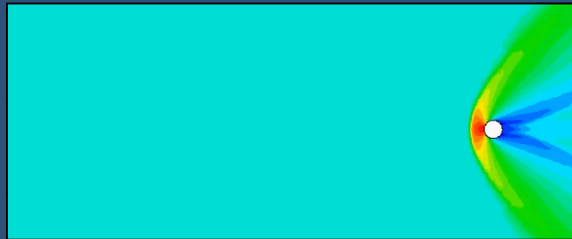
Case	자유류 속도 (Ma.)	물체 이동 속도 (Ma.)
1	0.0	2.0
2	1.0	1.0
3	1.5	0.5
4(Reference)	2.0	0.0



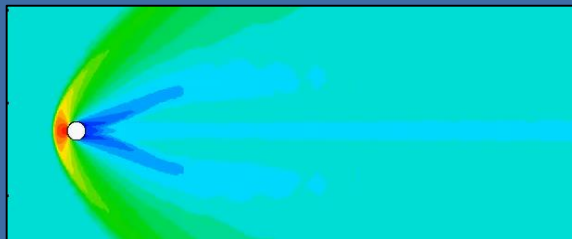




$M_\infty = 0.0$   
물체이동속도 = 2.0



$M_\infty = 1.0$   
물체이동속도 = 1.0



$M_\infty = 1.5$   
물체이동속도 = 0.5

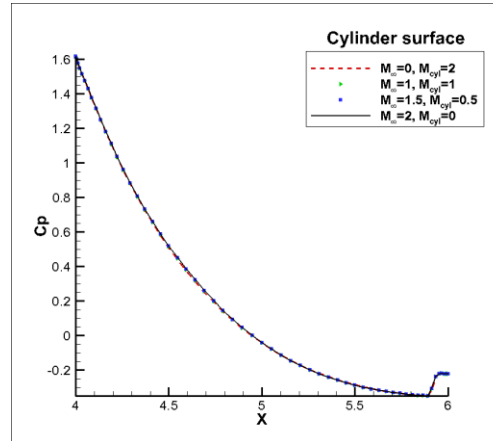


$M_\infty = 2.0$   
물체이동속도 = 0.0

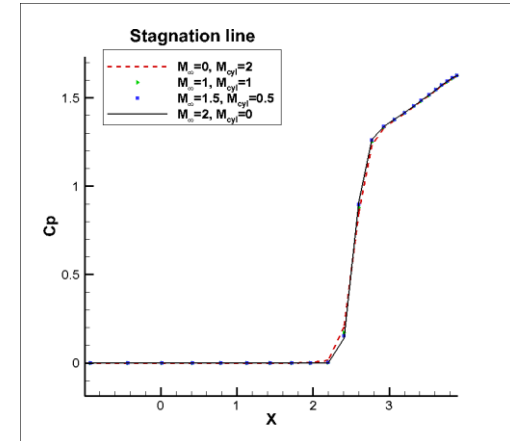


## ◆ Moving Cylinder/Sphere 해석 결과 비교

### Moving Cylinder

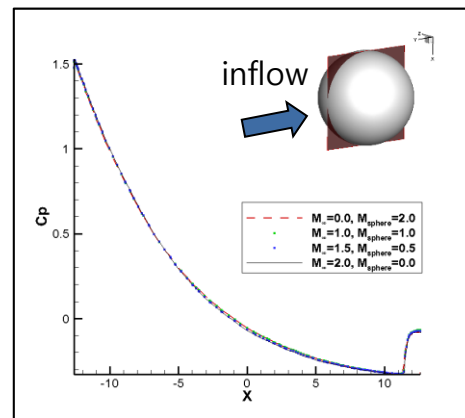


Cylinder Surface

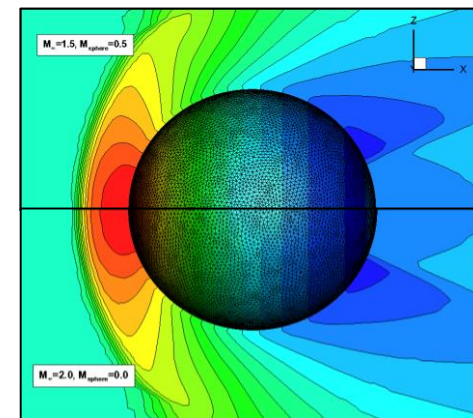


Stagnation Line(Y=0)

### Moving Sphere



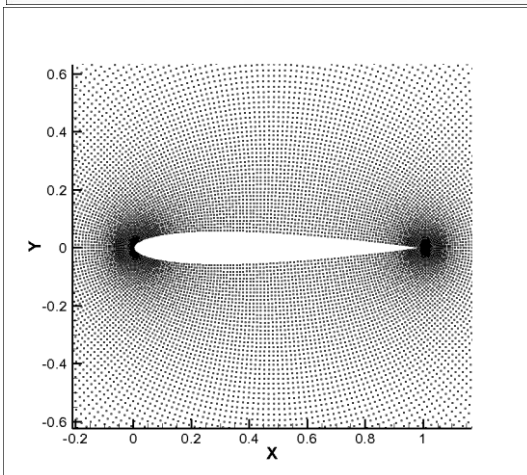
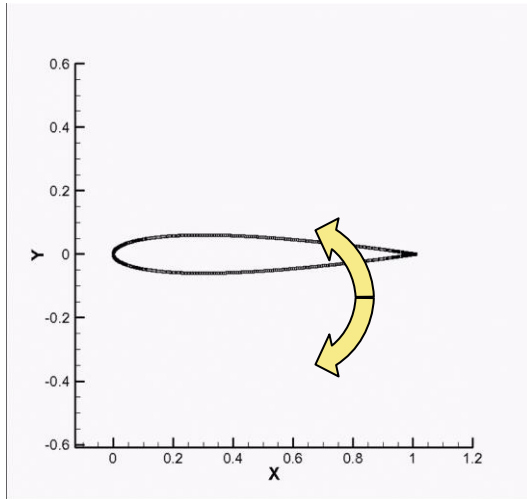
Pressure coefficient  
(Surface z=0)



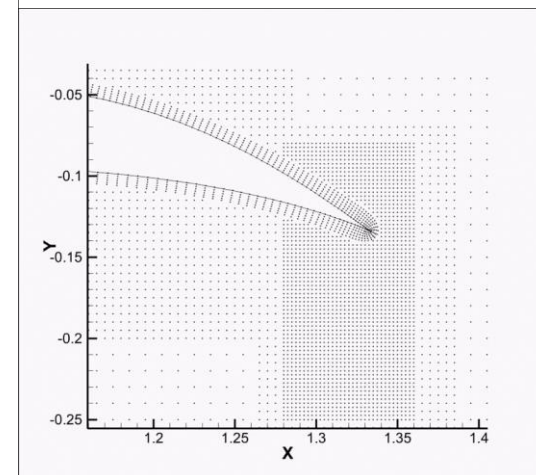
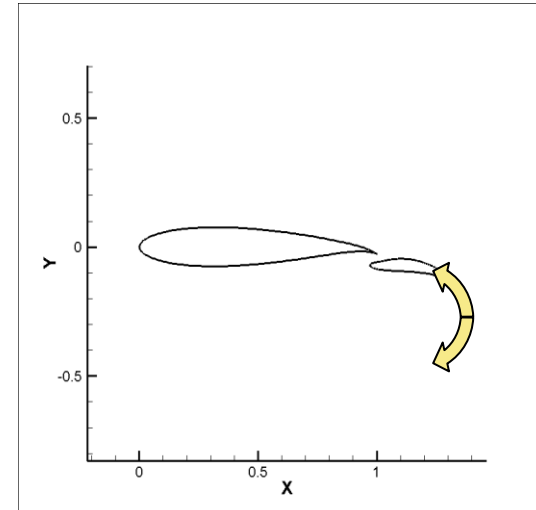
Upper  
 $M_\infty = 1.5, M_{sphere} = 0.5$   
Nether  
 $M_\infty = 2.0, M_{sphere} = 0.0$



## ◆ 검증 문제 해석 개요



<Unsteady flow of oscillating NACA0012>

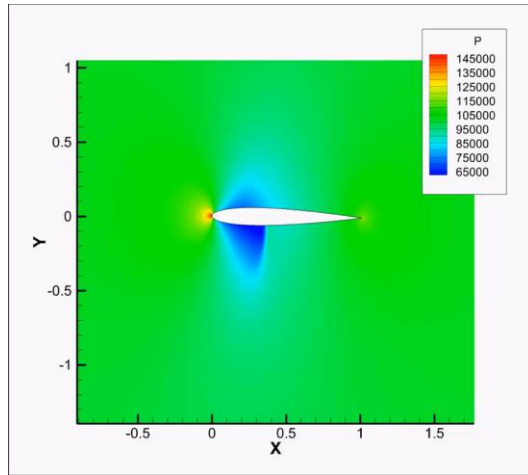


<William's airfoil with oscillating flap>

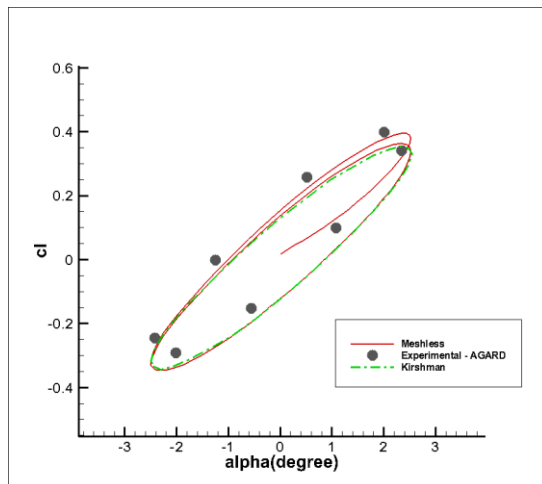




## 검증 문제 해석 결과

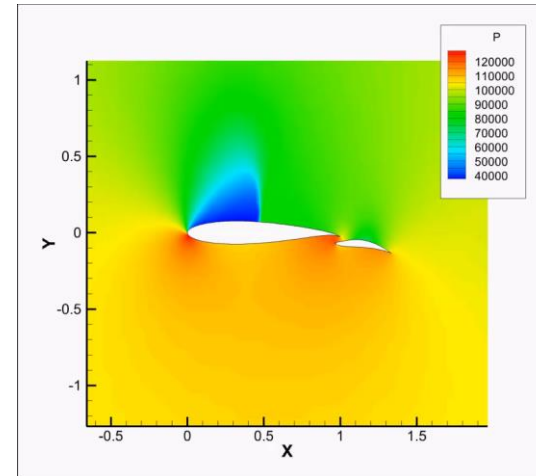


Pressure contour

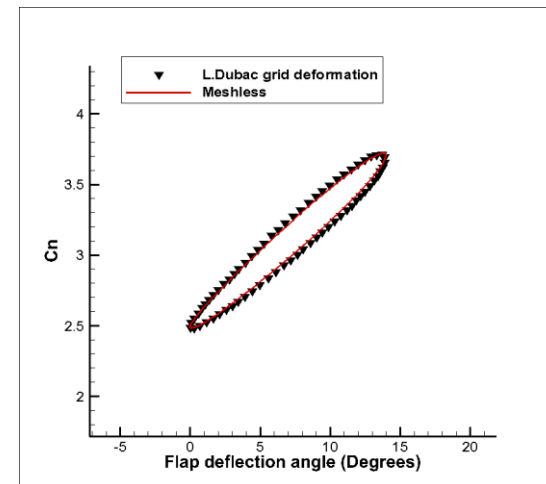


Cl vs. AOA

<Unsteady flow of oscillating NACA0012>



pressure contour



Cn vs. Deflection angle

<William's airfoil with oscillating flap>

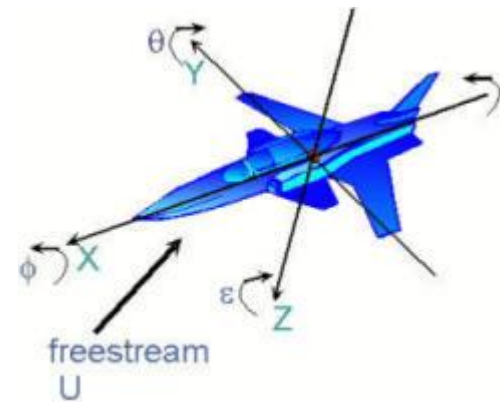


## ◆ Six-DOF의 움직임을 고려한 비정상 유동 해석

- 실제 사용되는 비행체들의 움직임을 모사하기 위한 Six-DOF를 고려한 궤도 계산 기법을 무격자 코드에 적용
- Translational, Attitude motion 모사를 위한 Newton's law 와 Euler's Law를 이용하여 궤도 해석

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= a_{11}(b_1 + m_{B1}) + a_{12}(b_2 + m_{B2}) + a_{13}(b_3 + m_{B3}) \\ \frac{dq}{dt} &= a_{21}(b_1 + m_{B1}) + a_{22}(b_2 + m_{B2}) + a_{23}(b_3 + m_{B3}) \\ \frac{dr}{dt} &= a_{31}(b_1 + m_{B1}) + a_{32}(b_2 + m_{B2}) + a_{33}(b_3 + m_{B3}) \end{aligned} \right\}$$

**Euler's Law**



$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= rv - qw + \frac{f_{B1}}{mass} + t_{13}g \\ \frac{dv}{dt} &= pw - ru + \frac{f_{B2}}{mass} + t_{23}g \\ \frac{dw}{dt} &= qu - pv + \frac{f_{B3}}{mass} + t_{33}g \end{aligned} \right\}$$

**Newton's Law**

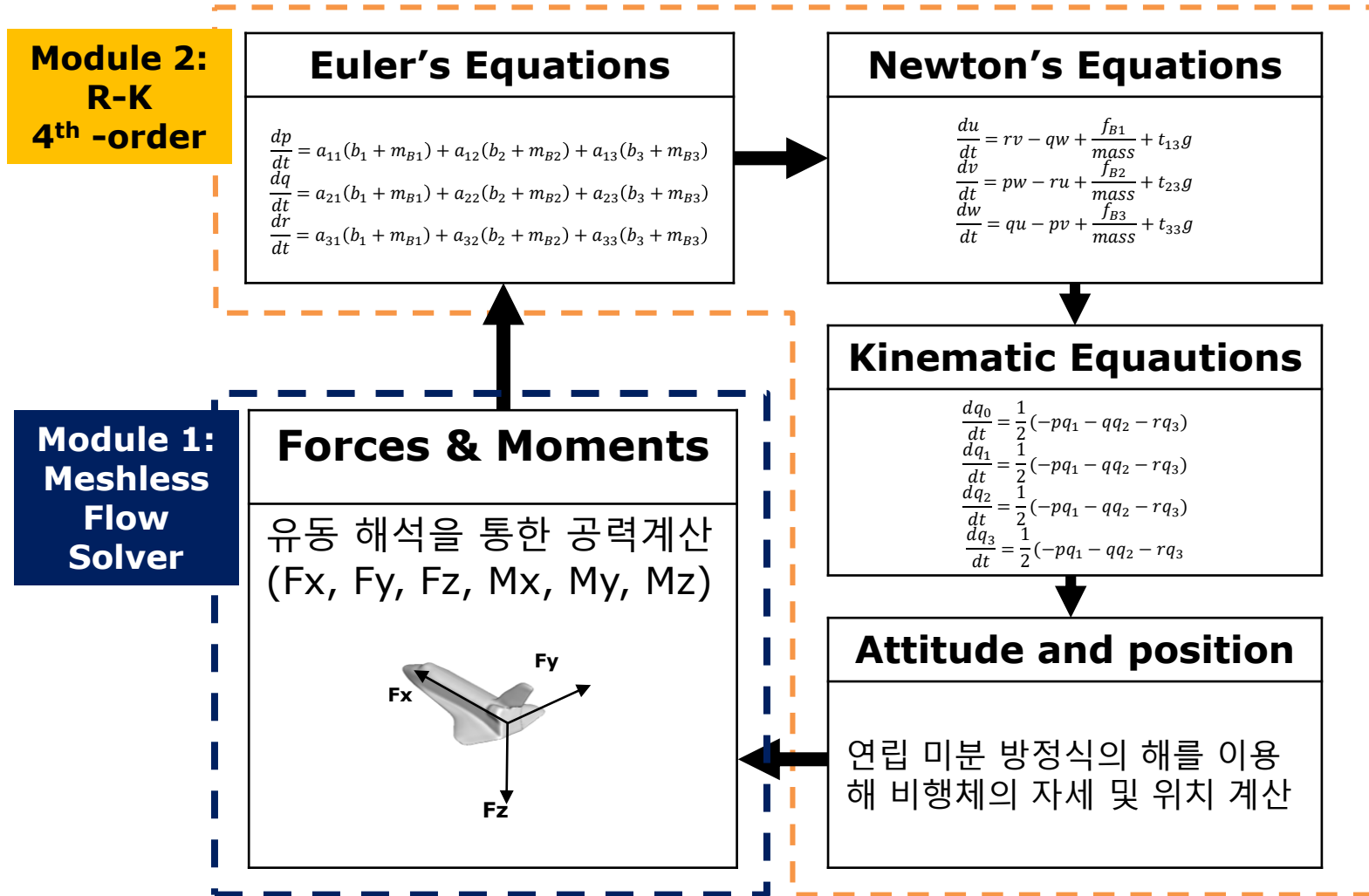
$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_0}{dt} &= \frac{1}{2}(-pq_1 - qq_2 - rq_3) \\ \frac{dq_1}{dt} &= \frac{1}{2}(-pq_1 - qq_2 - rq_3) \\ \frac{dq_2}{dt} &= \frac{1}{2}(-pq_1 - qq_2 - rq_3) \\ \frac{dq_3}{dt} &= \frac{1}{2}(-pq_1 - qq_2 - rq_3) \end{aligned} \right\}$$

**Kinematic Equation**

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{\lambda}(I_{22}I_{33} - I_{23}I_{32}), a_{12} = \frac{1}{\lambda}(I_{13}I_{32} - I_{12}I_{33}), a_{13} = \frac{1}{\lambda}(I_{12}I_{23} - I_{13}I_{22}) \\ a_{21} &= \frac{1}{\lambda}(I_{23}I_{31} - I_{21}I_{33}), a_{22} = \frac{1}{\lambda}(I_{11}I_{33} - I_{13}I_{31}), a_{23} = \frac{1}{\lambda}(I_{13}I_{21} - I_{11}I_{23}) \\ a_{31} &= \frac{1}{\lambda}(I_{21}I_{32} - I_{22}I_{31}), a_{32} = \frac{1}{\lambda}(I_{12}I_{31} - I_{11}I_{32}), a_{33} = \frac{1}{\lambda}(I_{11}I_{22} - I_{21}I_{22}) \\ \lambda &= I_{11}I_{22}I_{33} + I_{21}I_{32}I_{13} + I_{31}I_{12}I_{23} - I_{11}I_{32}I_{23} - I_{31}I_{22}I_{13} - I_{21}I_{12}I_{33} \\ b_1 &= p(-rl_{21} + ql_{31}) + q(-rl_{22} + ql_{32}) + r(-rl_{23} + ql_{33}) \\ b_2 &= p(rl_{11} - pl_{31}) + q(rl_{12} - pl_{32}) + r(rl_{13} - ql_{33}) \\ b_3 &= p(-ql_{11} + pl_{21}) + q(-ql_{12} + pl_{22}) + r(-ql_{13} + pl_{23}) \end{aligned}$$



## ◆ Flow Chart



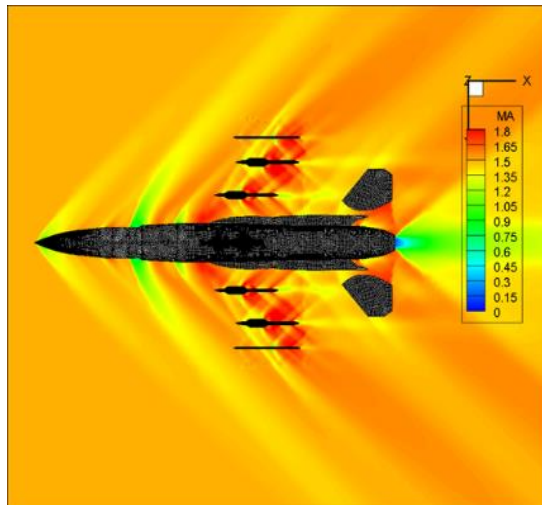
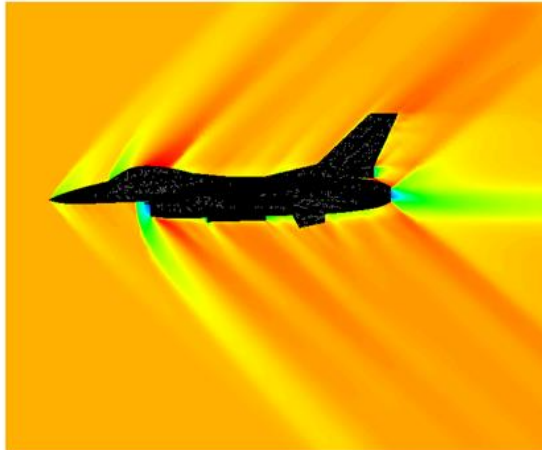
## 3.

### 해석 결과

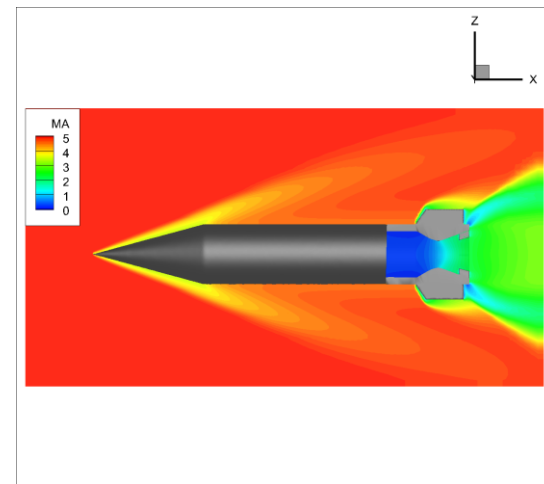
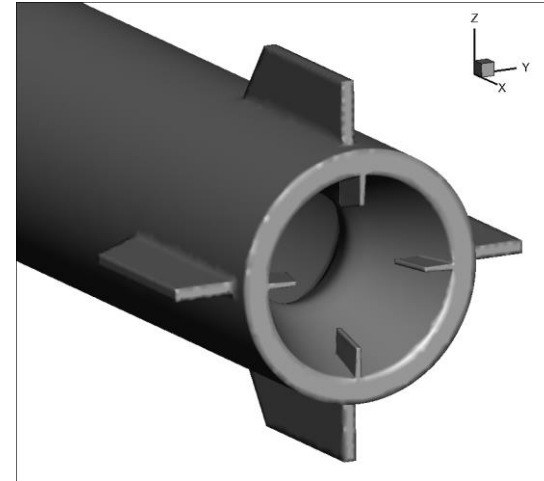
- 무격자 해석 결과 Example
- EGLIN Store Separation
- F-16 Store Separation
- Unfolding Fin Motion



## ◆ 무격자 해석 결과 Example



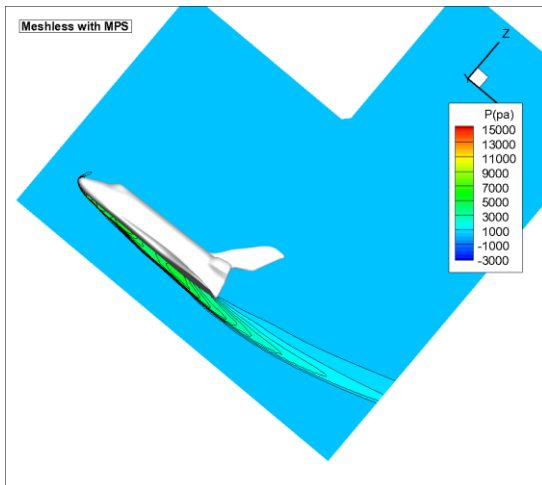
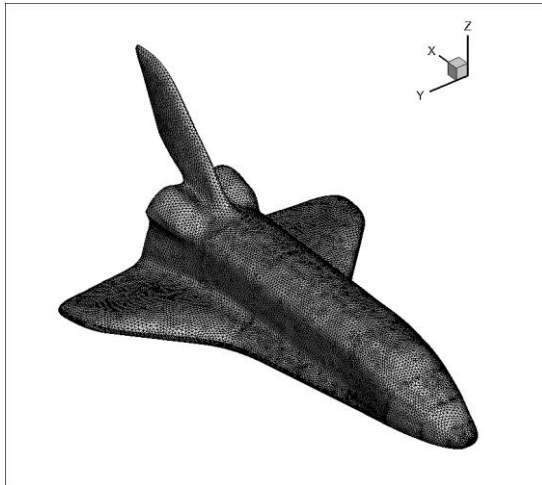
F-16 Supersonic fighter



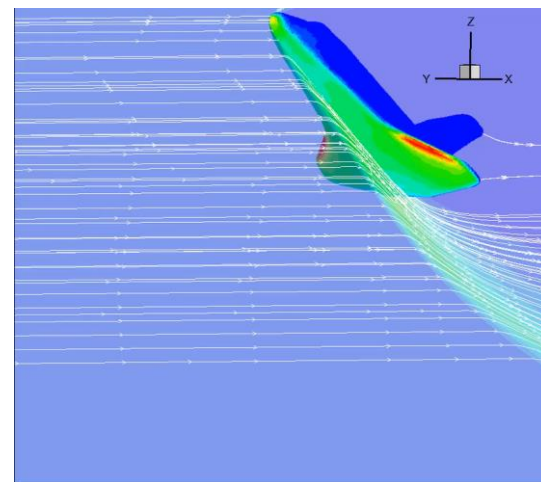
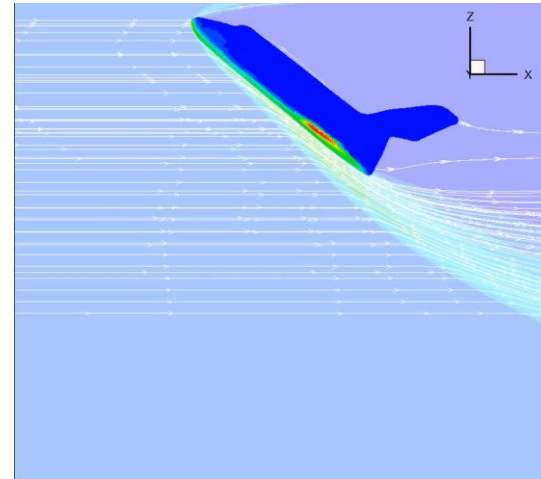
NASA X TM 2059 with Nozzle and Vanes



## ◆ 비평형 무격자 해석 결과



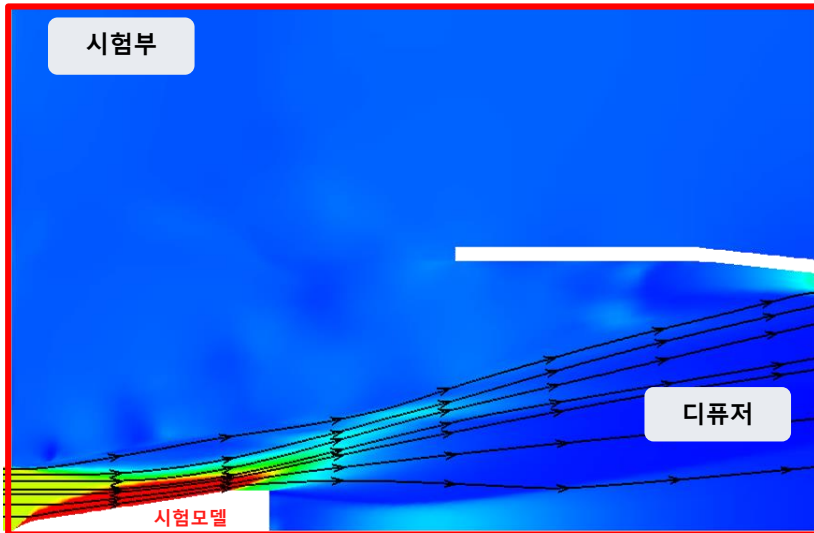
Mach 20 Space Shuttle Re-entry  
Steady Problem



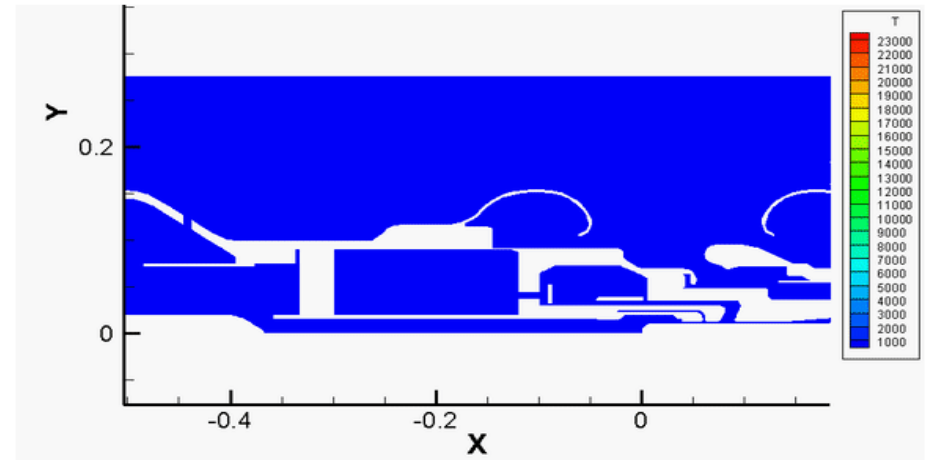
Mach 20 Space Shuttle 재진입 궤적  
유동 해석



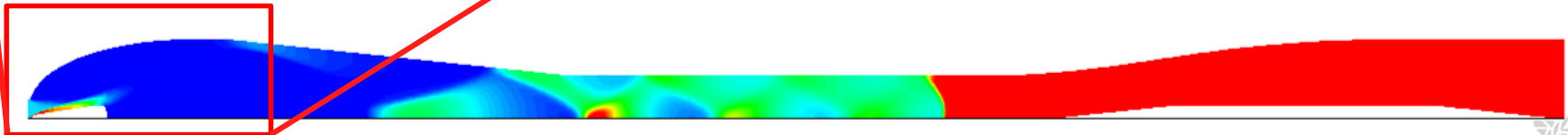
## ◆ 평형 무격자 해석 결과



Mach 7 고엔탈피 풍동 시험부  
(평형 공기)

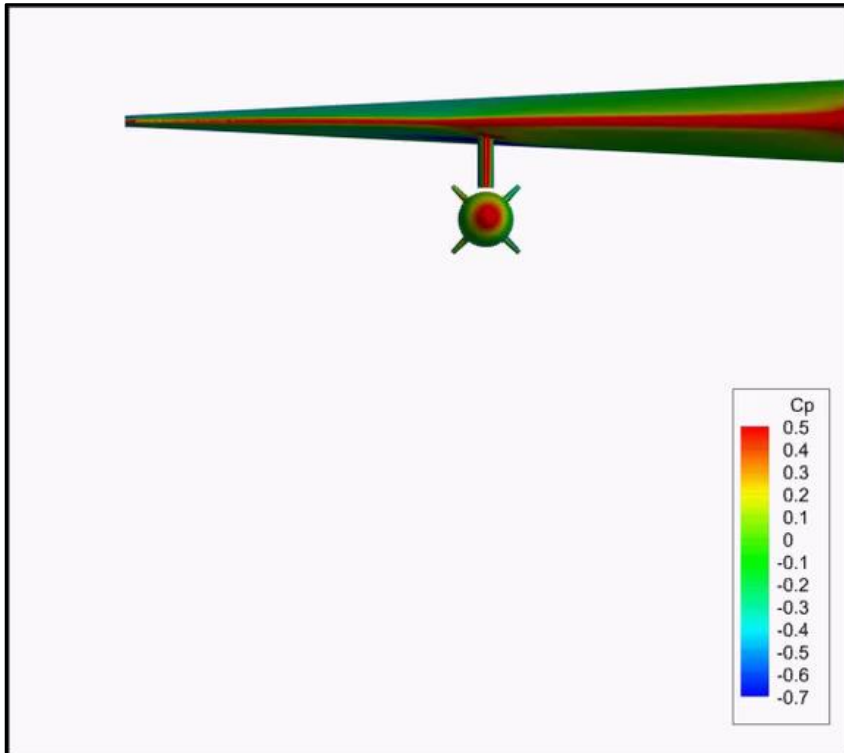
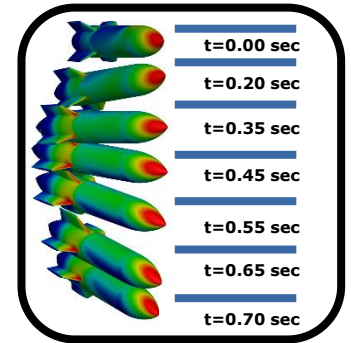


High-voltage Circuit breaker  
(평형 SF<sub>6</sub>)

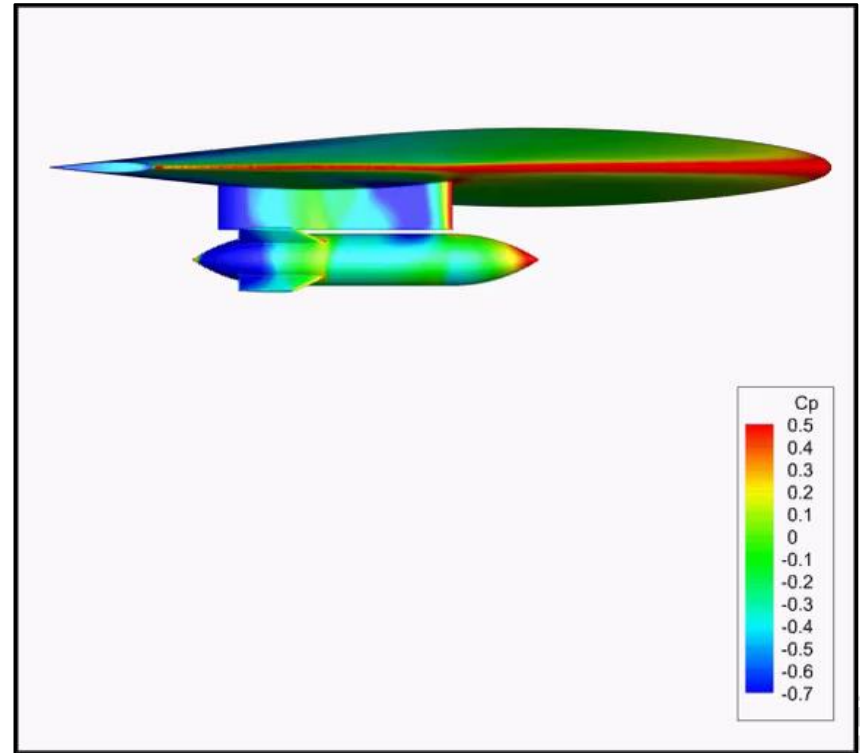


## ◆ 무격자 해석 결과 Example

- EGLIN Store Separation 6DOF moving 해석
- 표면 Cp Contour Animation



Eglin 정면



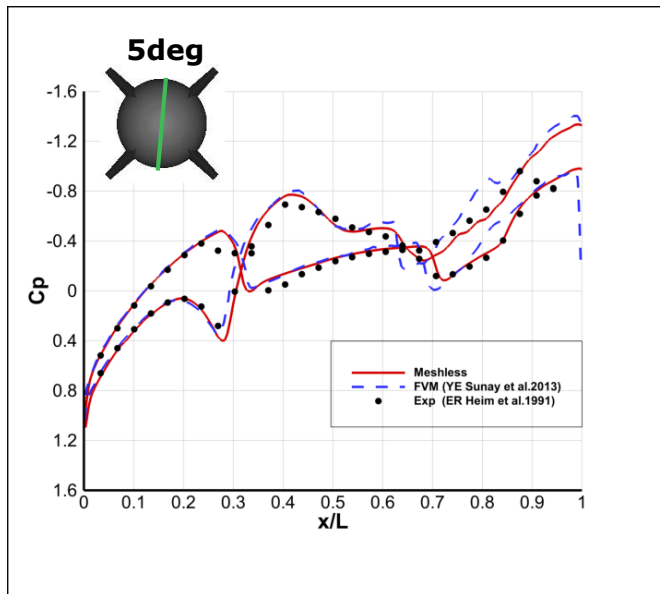
Eglin 측면



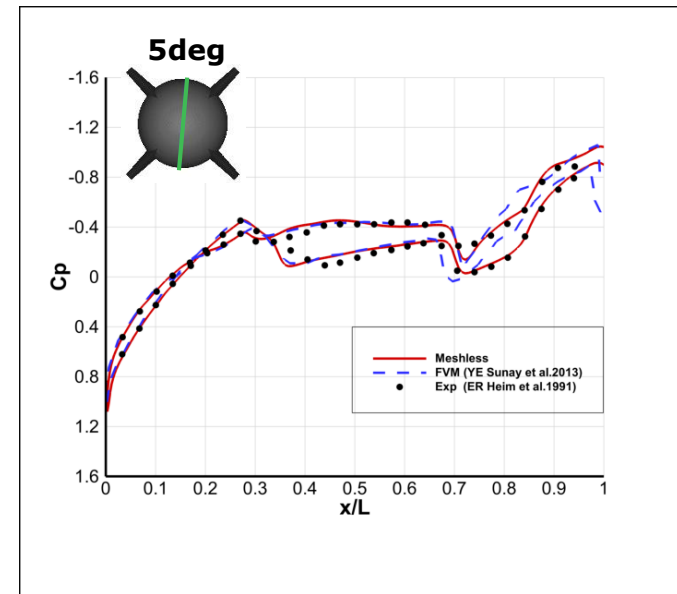


## ◆ EGLIN Store Separation 해석 결과

### ■ Store의 표면 $C_p$ 를 타 CFD 결과<sup>[1]</sup> 및 실험 결과<sup>[2]</sup>와 비교



Cp distribution of the store (t=0sec)



Cp distribution of the store (t=0.17sec)

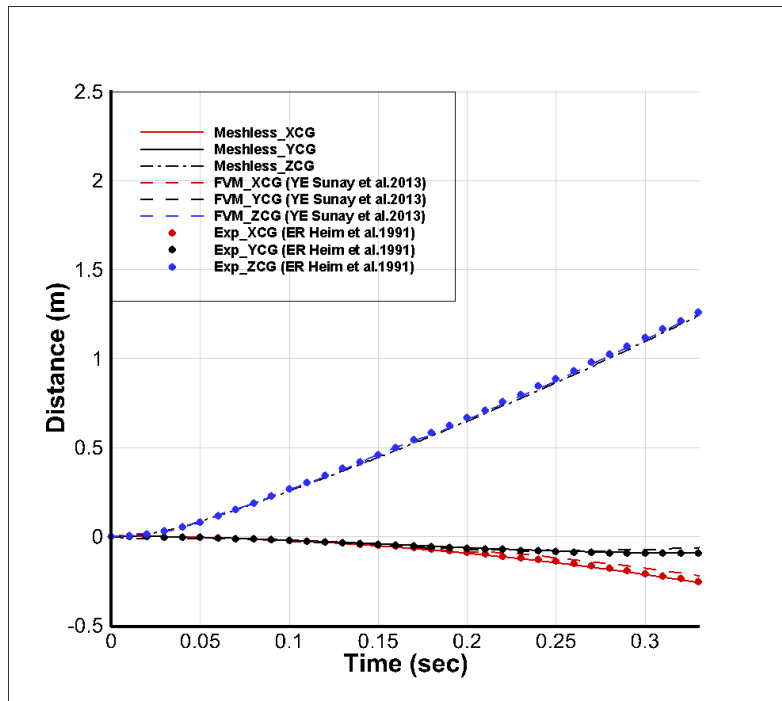
[1] SUNAY, Yunus Emre; GÜLAY, Emrah; AKGÜL, Ali. Numerical simulations of store separation trajectories using the EGLIN test. Scientific Technical Review, 2013, 63.1: 10-16.

[2] HEIM, E. R. CFD wing/pylon/finned store mutual interference wind tunnel experiment. ARNOLD ENGINEERING DEVELOPMENT CENTER ARNOLD AFS TN, 1991.

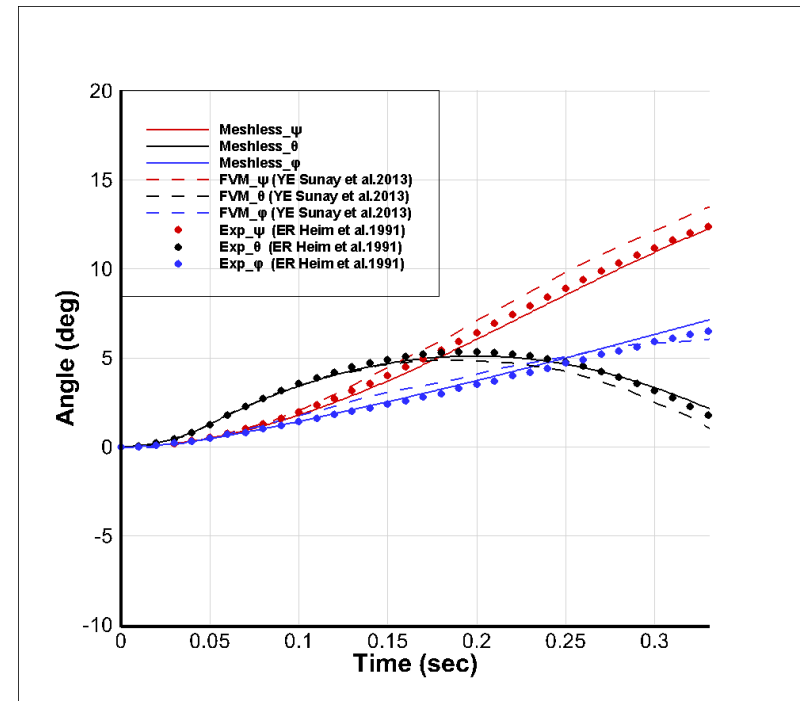


## ◆ EGLIN Store Separation 해석 결과

### ■ 궤도 데이터를 타 CFD 결과<sup>[1]</sup> 및 실험 결과<sup>[2]</sup>와 비교



Center of gravity location



Angular orientation

[1] SUNAY, Yunus Emre; GÜLAY, Emrah; AKGÜL, Ali. Numerical simulations of store separation trajectories using the EGLIN test. Scientific Technical Review, 2013, 63.1: 10-16.

[2] HEIM, E. R. CFD wing/pylon/finned store mutual interference wind tunnel experiment. ARNOLD ENGINEERING DEVELOPMENT CENTER ARNOLD AFS TN, 1991.



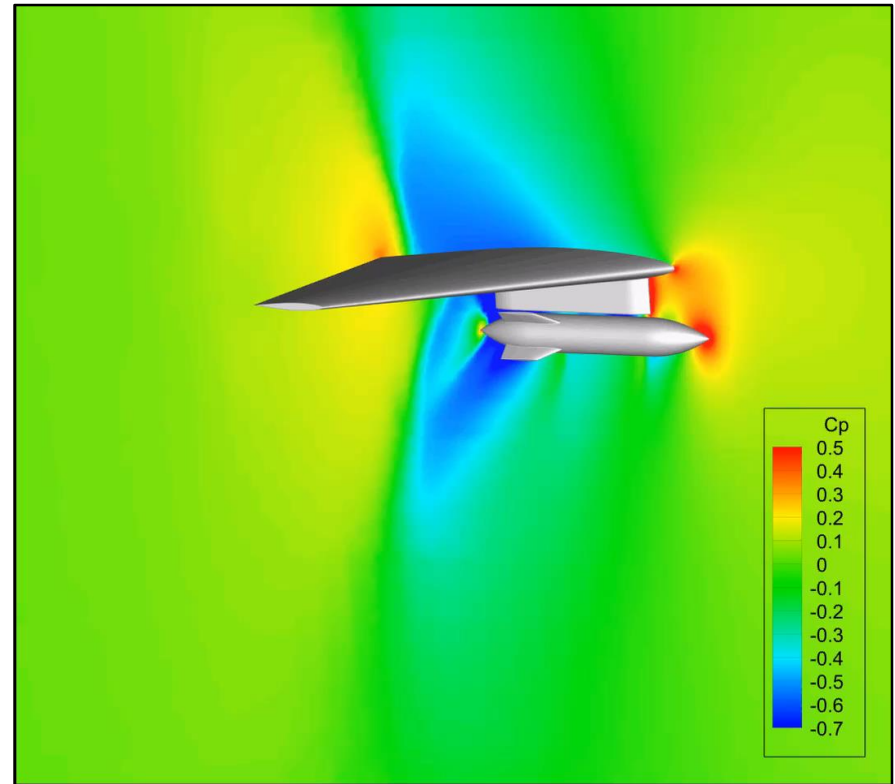
## ◆ EGLIN Store Separation 해석 결과

### ■ 질점계 생성 및 유동 해석 시간

유동 해석 코어 개수		192
표면 격자 개수		195,476
공간 질점 개수		4,781,136
초기 질점계 생성 시간		830 sec
초기 정상 유동 해석 시간		5,000 sec
# of Physical Time Iteration		90
1 Physical Time Step 당	질점계 재구성 시간	27 sec
	# of Pseudo Time Iteration	150
	1 Pseudo Time Step 당 유동 해석 시간	4.5 sec
	유동 해석 시간	675 sec
	시간비 (질점 재구성 시간/유동 해석 시간)	4 %
총 해석 시간		68,560 sec (≒ 19 hr)



Fluent 대비 1/6의 계산 시간 소요

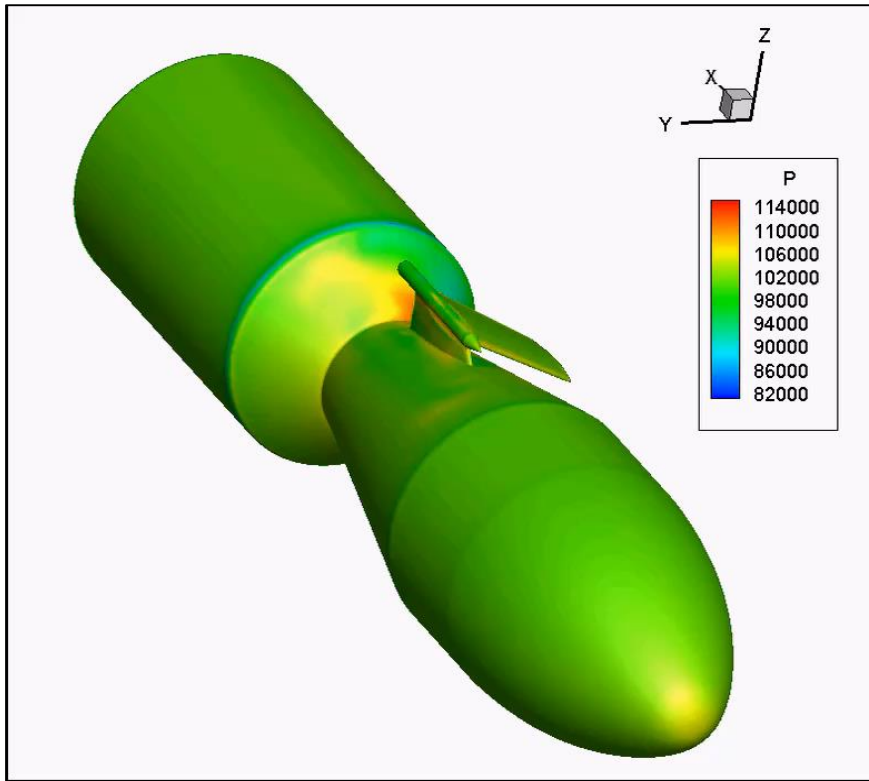


비정상 유동 해석 결과  
Pressure Coefficient Contour  
(Surface = Store's y cross section)

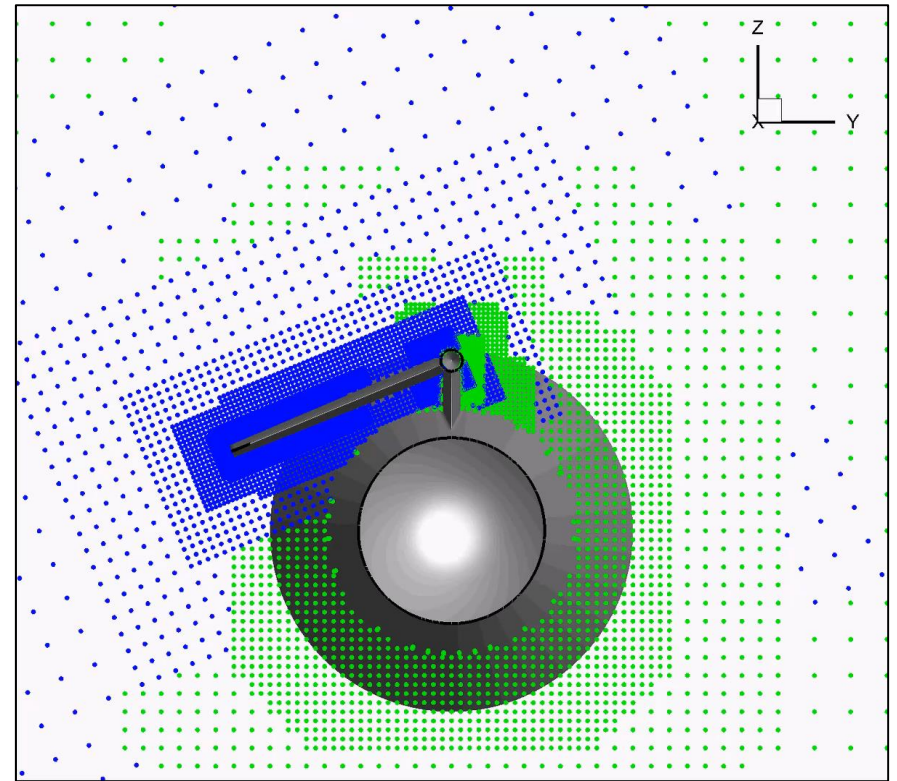


# Unfolding Fin Motion

## ◆ Unfolding Fin Motion



Egin 측면 압력 Contour



Egin 후면 Animation



**감사합니다**